

Formule de Thabit pour les nombres aimables

Les pythagoriciens de la Grèce antique étaient fascinés par les nombres aimables. Deux nombres sont aimables lorsque chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs de l'autre nombre, à l'exception du nombre lui-même. (Un diviseur propre d'un nombre n'inclut pas le nombre lui-même). La plus petite paire est 220 et 284. Le nombre 220 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110 (diviseurs dont la somme est égale à 284) et 284 est divisible par 1, 2, 4, 71 et 142 (diviseurs dont la somme est égale à 220).

En 850, l'astronome et mathématicien arabe Thabit ibn Qurra (826 – 901) a élaboré une formule qui permet de générer des nombres aimables. Calculez $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^n - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ pour un entier $n > 1$. Si p , q et r sont des nombres premiers, alors $2^n pq$ et $2^n r$ composent une paire de nombres aimables. Quand $n = 2$, nous obtenons les nombres 220 et 284, mais la formule ne génère pas tous les nombres aimables qui existent. Dans chaque cas connu, les deux nombres sont soit pairs soit impairs. Ne découvrirons-nous jamais une paire composée d'un nombre pair et d'un nombre impair? Les nombres aimables sont assez difficiles à trouver. Par exemple, en 1747, Leonhard Euler, physicien et mathématicien suisse, n'en avait trouvé que 30 paires. Aujourd'hui, nous en connaissons plus de 11 millions, mais seules 5 001 d'entre elles possèdent des nombres inférieurs à $3,06 \times 10^{11}$.

Dans la Genèse (32 :14), Jacob offre 220 chèvres à son frère. Selon une tradition mystique, il s'agirait d'un « arrangement secret », 220 étant l'un des membres d'une paire de nombres aimables, par lequel Jacob aurait cherché à s'assurer l'amitié d'Esau. Selon Martin Gardner, célèbre auteur mathématique et scientifique, « au XI^e siècle, un Arabe nota les effets érotiques engendrés par la consommation d'une nourriture liée au nombre 284, tandis que le plat de sa partenaire était associé au nombre 220. Il omit toutefois de préciser de quelle façon l'expérience avait fonctionné. »

[Tiré de Pickover, C.A. (2010), *Le Beau Livre des Maths, De Pythagore à la 57^e dimension*, Dunod, Paris.]